Cuntz algebraのindexが有限なsubfactorの構成について(超有限II$_1$型因子上のシフトの外部共役問題)

泉, 正己

数理解析研究所講究録
948巻 1996年 1-10

Cuntz algebra の index が有限な subfactor の構成について

京大数理研　泉　正己 (Masaki Izumi)

§1. Introduction

M を properly infinite factor、N を M の subfactor で、minimum index $[M:N]_0 = 4\cos^2\frac{\pi}{5}$ とする。このとき、$M \supset N$ の principal graph は A_4 であり、次のことが知られている。[I]

<u>Fact</u>　$\rho \in \mathrm{End}(M)$ ($\mathrm{End}(M)$ は M の endomorphism 全体) が存在して次を満たす.

(i) $\rho(M) = N$

(ii) $[\rho^2] = [\mathrm{id}] \oplus [\rho]$

ただし (ii) の意味は、M の isometries S_1, S_2 で次を満たすものが存在するということである。

$$S_1S_1^* + S_2S_2^* = 1,\quad S_i^*S_j = \delta_{ij} \tag{1.1}$$

$$S_1 x = \rho^2(x) S_1 \quad \text{for } x \in M \tag{1.2}$$

$$S_2\rho(x) = \rho^2(x) S_2 \quad \text{for } x \in M \tag{1.3}$$

ここで次のことが考えられる。(1.1) より S_1, S_2 で生成される C^* algebra は Cuntz algebra $\mathcal{O}_2$ である。もし $\rho(S_1) \in C^*(S_1, S_2)$ が満たされていれば、$C^*(S_1, S_2) \supset \rho(C^*(S_1, S_2))$ は "index が有限" な pair ではないだろうか? C^* algebra の index については、綿谷氏によって一般論が用意されている [W]。これが使えるのではないだろうか? 答は yes であり、その詳細を報告するのが本文の目的である。

§2. Basic lemma and examples.

次の lemma は、infinite な C^* algebra において index 有限な subalgebra をいかにして作るかということに関して、一つの方針を与える。

Lemma 2.1. A を C^* algebra, V を A の isometry で次を満たすとする。

$$V^* \rho(V) = \pm \frac{1}{d} \qquad (d > 0)$$

$$V x = \rho^2(x) V \qquad \text{for } x \in A$$

このとき次が成立する。

(i) $E(x) = \rho(V^* \rho(x) V)$ とすると、E は A から $\rho(A)$ への conditional expectation である。

(ii) $(d\cdot V^*, d\cdot V)$ は quasi-basis である。つまり

$$x = d^2 V^* E(Vx) = d^2 E(xV^*)V \quad \text{for } x \in A$$

(iii) $\mathrm{Index}\, E = d^2$

証明は単なる計算.

§1の例にもどろう。まず(1.2)の両辺に ρ をかける。

$$\rho(S_1)\rho(x) = \rho^3(x)\rho(S_1) \quad \text{for } x \in M. \qquad (2,1)$$

これに左から S_1^* をかけると

$$S_1^*\rho(S_1)\rho(x) = S_1^*\rho^3(x)\rho(S_1) = \rho(x)S_1^*\rho(S_1) \qquad (2,2)$$

2番目の等号には(1,2)を使った。よって $S_1^*\rho(S_1) \in \rho(M)' \cap M$ $= \mathbb{C}$ が導かれる。次に(2,1)の両辺に S_2^* を左からかけると、

$$S_2^*\rho(S_1)\rho(x) = S_2^*\rho^3(x)\rho(S_1) = \rho^2(x)S_2^*\rho(S_1) \qquad (2,3)$$

2番目の等号には(1,3)を使った。よって $S_2^*\rho(S_1)$ は ρ と ρ^2 の間の intertwiner であり、(1,2)(1,3)より $S_2^*\rho(S_1) \propto S_2$ となる。

$$\rho(S_1) = (S_1S_1^* + S_2S_2^*)\rho(S_1) = S_1(S_1^*\rho(S_1)) + S_2(S_2^*\rho(S_1)) \qquad (2,4)$$

より $\rho(S_1) \in C^*(S_1, S_2)$ が示せ、同様な議論により $\rho(S_2)$ $\in C^*(S_1, S_2)$ も出る。

次に実際に $\rho|C^*(S_1,S_2)$ を決定してやろう。上で $S_1^*\rho(S_1) \in \mathbb{C}$ を示したが、実は Longo の一般論により [L]、$S_1^*\rho(S_1) = \pm\frac{1}{d}$ となることが知られている。($d = [M:N]_0^{\frac{1}{2}}$)。$\rho(S_1^*)\rho(S_1) = 1$, $d^2 = 1 + d$ S_2 の phase の自由度を使えば、$\rho(S_1)$ は次のように定まる。

$$\rho(S_1) = \pm\frac{S_1}{d} + \frac{S_2S_2}{\sqrt{d}}$$

同様に $\rho(S_i^*)\rho(S_j)=\delta_{ij}$, $\rho(S_1)\rho(S_1)^*+\rho(S_2)\rho(S_2)^*=1$ を使うと、

$$\rho(S_2) = \omega_1\left(\frac{S_1}{\sqrt{d}} \mp \frac{S_2S_2}{d}\right)S_2^* + \omega_2 S_2 S_1 S_1^*$$

となる $(|\omega_1| = |\omega_2| = 1)$。(1.2),(1.3) を使うと、$\omega_1=\omega_2=1$ となり次の例を得る。

例1　$A = \mathcal{O}_2 = C^*(S_1, S_2)$, $d = 2\cos\frac{\pi}{5}$. ρを次で定める。

$$\rho(S_1) = \frac{S_1}{d} + \frac{S_2S_2}{\sqrt{d}}$$

$$\rho(S_2) = \left(\frac{S_1}{\sqrt{d}} - \frac{S_2S_2}{d}\right)S_2^* + S_2S_1S_1^*$$

このとき $\rho\in \mathrm{End}(\mathcal{O}_2)$ となり次を満たす。

$$S_1 x = \rho^2(x)S_1$$

$$S_2\rho(x) = \rho^2(x)S_2$$

$\mathcal{O}_2$ 上の $\mathbb{T}$ action γ を次で定める。

$$\gamma_t(S_1) = e^{2it}S_1,\quad \gamma_t(S_2) = e^{it}S_2.$$

γとρが可換なことに注意されたい。このγは、後で表現を作るときに、重要な役割を演じる。

同様に $D_5^{(1)}$ ( ) をモデルにすると次の例を得る。

例2　$A = \mathcal{O}_3 = C^*(S_1, S_2, S_3)$, $d=2$. $a\in\mathbb{T}$

$$\rho_a(S_1) = \frac{S_1+S_2}{2} + \frac{S_3S_3}{\sqrt{2}}$$

$$\rho_a(S_2) = \left(\frac{S_1+S_2}{2} - \frac{S_3S_3}{\sqrt{2}}\right)\sqcup$$

$$\rho_a(S_3) = \bar{a}\,\frac{S_1 - S_2}{\sqrt{2}} S_3^* + a S_3 (S_1 S_1^* - S_2 S_2^*)$$

ここで $U = S_1 S_1^* + S_2 S_2^* - S_3 S_3^*$

$\mathbb{Z}_2$ action α と $\mathbb{T}$ action γ を次で定める。

$$\alpha(S_1) = S_2,\ \alpha(S_2) = S_1,\ \alpha(S_3) = -S_3$$

$$\gamma_t(S_1) = e^{2it} S_1,\ \gamma_t(S_2) = e^{2it} S_2,\ \gamma_t(S_3) = e^{it} S_3.$$

このとき次が成立する。

$$S_1 x = \rho_a^2(x) S_1$$

$$S_2 \alpha(x) = \rho_a^2(x) S_2$$

$$S_3 \rho_{\bar{a}^2}(x) = \rho_a^2(x) S_3$$

$$\alpha \circ \rho_a(x) = \rho_a(x),\ \rho_a \circ \alpha(x) = \mathrm{Ad}\,U \circ \rho_a(x)$$

$$\gamma_t \circ \rho_a = \rho_a \circ \gamma_t.$$

§3. Representations.

$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}_+^n$ とし、$\mathcal{O}_n$ 上の $\mathbb{R}$ action γ^ω を、次で定義する。

$$\gamma_t^\omega(S_j) = e^{it\omega_j} S_j$$

§2では、我々の例には、このタイプの actionが自然に現われることを見た。ここでは、γ^ω の KMS state を使って、Cuntz algebra の pairから III 型 factor の pairを作ることを考える。

$\omega_0 = (1, 1, \ldots, 1)$ とすると、γ^{ω_0} は有名な Cuntz algebra のゲージ変換であり、$\mathcal{O}_n^{\gamma^{\omega_0}}$ (fixed point algebra) は、UHF algebra $\bigotimes_{k\geq 1}^{\infty} M_n$ と自然に同型であることは、よく知られている。ここで

$$\pi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \gamma_t^{\omega_0}(x)\,dt \qquad \text{for } x \in \mathcal{O}_n$$

とすると、π は $\mathcal{O}_n$ から $\mathcal{O}_n^{\gamma^{\omega_0}}$ への conditional expectation となる。一般の $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、$\beta > 0$ を、

$$\sum_j e^{-\beta\omega_j} = 1$$

で定め、$\bigotimes_{k\geq 1}^{\infty} M_n$ 上の state ψ^ω を次で定義する

$$\psi^\omega = \bigotimes_{k\geq 1}^{\infty} \mathrm{Tr}(A_\omega \cdot), \qquad A_\omega = \begin{bmatrix} e^{-\beta\omega_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-\beta\omega_n} \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{O}_n$ 上の state φ^ω を $\varphi^\omega = \psi^\omega \circ \pi$ で定義すると、次のことが知られている。

<u>定理3.1</u>(D. Evans [E]) φ^ω は γ^ω の unique な KMS state である。

このことから、φ^ω はすべて factor state であるが、特殊な場合については、型が決定できる。

<u>定理3.2</u> 次が成立。

(i) $\omega=(\omega_1,\omega_1\ldots,\omega_1,\omega_2,\omega_2,\ldots,\omega_2,\omega_3\ldots,\omega_k)\in\mathbb{N}^n$ で．

$\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_k$ は relatively prime

$\Longrightarrow$ φ^ω は type $\mathrm{III}_{e^{-\beta}}$ state.

(ii) $\omega=(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$, $\omega_i/\omega_j\notin\mathbb{Q}$ $(i\neq j)$

$\Longrightarrow$ φ^ω は type III_1 state.

証明の point は．$\mathcal{O}_n^{\gamma^\omega}$ が factor であることを示し、$\Gamma(\sigma)=\mathrm{Sp}(\gamma)$ を使うところであるが、それは次の方針でできる。

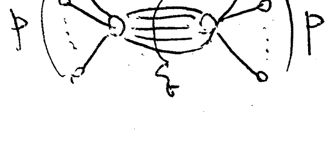
(i) $\mathcal{O}^{\gamma^\omega}$ が AF algebra であることを示し、trace が unique であることを言う。

(ii) UHF algebra の議論に帰着。

例1，例2を見るとわかるように．我々にとって重要なのは、$\omega=\omega_{p,q}=(\overbrace{2,2,\ldots,2}^{p},\overbrace{1,1,\ldots,1}^{q})$ となる場合である。実際，筆者が構成した Cuntz algebra の endomorphism で．Lemma 2.1 を満たすものは、ある p,q に対して．$\gamma^{\omega_{p,q}}$ と可換になるものばかりである。具体的には

$(p,q)=(1,1),(1,2),(2,2)\ (m,m-1),\ (m,0)$

という値が出ている。このことは．偶然ではなく、次の事実からの必然である。$\mathcal{G}_{p,q}$ を下図のグラフとする。



命題3.3 $\mathcal{O}_n^{\gamma^{\omega_{p,q}}}$ は $\mathcal{G}_{p,q}$ の string algebra と同型。

Cuntz は $\mathcal{O}_n$ を導入したときに、$\mathcal{O}_n$ が $\bigotimes_{k=1} M_n$ と $\mathbb{Z}$ との "crossed product" であることを示した。同様な意味で、命題3.3は、$\mathcal{O}_n$ が、$\mathcal{G}_{p,q}$ $(p+q=n)$ の string algebra と $\mathbb{Z}$ との "crossed product" という表示を持つことを示している。

次の定理により、Cuntz algebra の pair から III型 factor の pair が構成できる。

定理3.4 $\omega = \omega_{p,q}$, ρ を $\mathcal{O}_n$ の endomorphism で次を満たすとする。

$$S_1 x = \rho_1^2(x) S_1$$

$$S_1^* \rho(S_1) = \pm \tfrac{1}{d}, \quad (d > 0)$$

$$\gamma^\omega \circ \rho = \rho \circ \gamma^\omega .$$

このとき、$(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ を φ^ω での $\mathcal{O}_n$ の G.N.S. 表現とすると、ρ は $\pi_\omega(\mathcal{O}_n)''$ 上の normal endomorphism に拡張可能である。

この定理により expectation $E(x) = \rho(S_1^* \rho(x) S_1)$ も normal に拡張可能であり、その結果、type III_λ AFD factor の index 有限な subfactor を得る。ここで λ は、$p\lambda^2 + q\lambda = 1$ により定まる。

$N \subset M$をII_1 factorのindex有限なpairとし、

$$N \subset M \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots$$

を$N \subset M$から定まるtowerとする。A. Ocneanuは、$M_n \cap M'$ (or $M_n \cap N'$)のminimal projectionを、bimodule間のintertwinerのrange projectionとみなすことにより、connectionの概念を得ている。これに対し、我々のCuntz algebraでのapproachは、intertwiner自体がalgebraの内部にある場合を考えているのである。残念ながらCuntz algebra上のendomorphismでLemma 2.1を満たす例は今のところ多いとは言えない。(それでも無限個は存在する。)しかし、string algebraにintertwinerを1つ付加することによりinfiniteなC^*algebraを定義し(特別な場合はCuntz algebraになる)そのalgebra上で、Lemma 2.1を満たすendomorphismを構成するという試みは筆者により成功している。

Reference

[E] D. Evans: On $\mathcal{O}_n$, Pub. R.I.M.S., Kyoto Univ., 16 (1980), 915-927

[I] M. Izumi: Some results on classification of subfactors, preprint.

[L] R. Longo: Index of subfactors and statistics of quantum fields II, Comm. Math. Phys. 130 (1990), 285–309.

[W] Y. Watatani : Index for C^*-subalgebras, Mem. Amer. Math. Soc., Vol. 83, 424.